§1 复数与复变函数

§1.1 复数

一、复数及运算

Def1. 虚数单位 i：方程 $x^2+1=0$ 的根 $\pm i$

Def2. 复数：$z=x+iy$，x,y 均为实数

x 称为 z 的实部，记作 $\mathrm{Re}\,z$，y 称为 z 的虚部，记作 $\mathrm{Im}\,z$.

Def3. 共轭复数：$z=x+iy$ 与 $\bar{z}=x-iy$ 互为共轭复数

Def4. 复数的模与辐角

在 xOy 坐标系中的点 (x,y) 与复数 $z=x+iy$ 建立一一对应，故 xOy 坐标平面也可称为复平面，复数 $z=x+iy$ 与向量 $\overrightarrow{Oz}$ 一一对应

复数的模：$z=x+iy$ 的模 $|z| \xlongequal{\text{记作}} r=\sqrt{x^2+y^2}=|\overrightarrow{Oz}|$

复数的辐角：$\overrightarrow{Oz}$ 与 x 轴的正向的夹角 θ 称为 z 的辐角.

记作 $\mathrm{Arg}\,z$. $\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi$, $k=0,\pm1,\cdots$ ($z=0$ 无辐角)

这里 $\arg z$ 指辐角主值，经常这样规定：$-\pi<\arg z\leq \pi$

$0<\arg z\leq 2\pi$

例如，$\arg z=\frac{\pi}{4}$，$\mathrm{Arg}\,z=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k=0,\pm1,\cdots$

$(z=1+i)$

$\arg z=-\frac{\pi}{4}$ (或 $\arg z=\frac{7\pi}{4}$)，$\mathrm{Arg}\,z=\frac{7\pi}{4}+2k\pi$

$(z=1-i)$

例1 已知 $z=x+iy$，则 $(-\pi<\arg z\leq\pi)$

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, & x<0, y\geq 0\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi, & x<0, y<0\\ \frac{\pi}{2}, & x=0, y>0\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0, y<0\end{cases}$$

二、复数的四则运算

设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则：

(1) $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$

(2) $z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$

特别地，$z=x+iy$，$z\cdot\bar z=x^2+y^2$

例2 设 $|z_0|<1$，若 $|z|<1$，则 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar z_0\cdot z}\right|<1$

Pf. $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar z_0\cdot z}\right|<1 \Longleftrightarrow |z-z_0|^2<|1-\bar z_0\cdot z|^2$

$\Longleftrightarrow (z-z_0)(\bar z-\bar z_0)<(1-\bar z_0 z)(1-z_0\bar z)$

$\Longleftrightarrow z\bar z+z_0\bar z_0-z\bar z_0-z_0\bar z<1-z_0\bar z-\bar z_0 z+\bar z_0 z z_0\bar z$

$\Longleftrightarrow 1-|z|^2-|z_0|^2+|z|^2|z_0|^2>0$

$\Longleftrightarrow (1-|z_0|^2)(1-|z|^2)>0$

当 $|z_0|<1$，$|z|<1$ 时上式成立，故原式成立.

Rem. 例2的结论：(1) 设 $|z_0|<1$，若 $|z|>1$，则 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}\right|>1$

(2) 设 $|z_0|<1$，若 $|z|=1$，则 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}\right|=1$

综上得，变换 $w=\dfrac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}$ $(|z_0|<1)$ 将单位圆 $|z|<1$ 变为 $|w|<1$.

单位圆周 $|z|=1$ 变为 $|w|=1$，外部 $|z|>1$ 变为 $|w|>1$

问题：$w=\dfrac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}$ 是否将 z 平面正好变换为 w 平面？

二、复数的表示形式

1. $z=x+iy$：代数形式

2. $z=r\cos\theta+ir\sin\theta$：三角形式，$r=|z|$，$\theta=\arg z$

3. $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$：指数形式

Rem. 指数形式表明复数的乘、除运算满足指数运算律：

$z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$，$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

例如，$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$，$1-i=\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}}$

于是有：$e^{(\theta+2k\pi)i}=e^{\theta i}$，$k=0,\pm1,\cdots$

三、复数的乘幂与方根

1. 乘幂：$w=z^n$，$z^n=(x+iy)^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^ne^{in\theta}$

特别地，棣莫弗公式：(De Moivre)

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

Cor. $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$

$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$

$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta$

2. 方根：复数z的n次方根$\sqrt[n]{z}$：方程$z=w^n$的根

即：求$w=\rho e^{i\varphi}$满足$z=w^n$

$re^{i\theta}=\rho^ne^{in\varphi}\Rightarrow\rho=\sqrt[n]{r}$，$n\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}$，$k=0,\pm1,\cdots$

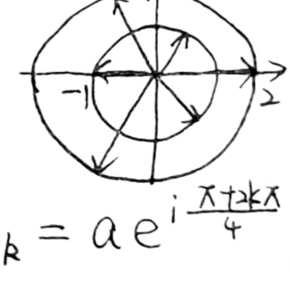
$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\,e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}$，$k=0,1,\cdots,n-1$

记$w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$，$k=0,1,\cdots,n-1$

Thm. 一个非零复数的n次方根有n个值($f(z)=\sqrt[n]{z}$)，这n个方根均匀落在半径为$\sqrt[n]{r}$的圆周$|z|=\sqrt[n]{r}$上

例如，$\sqrt[3]{-1}=e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}$，$k=0,1,2$

$\sqrt[3]{8}=2e^{\frac{2k\pi}{3}i}$，$k=0,1,2$



例2 方程$z^4+a^4=0\ (a>0)$的根：$z_k=ae^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$，$k=0,1,2,3$.